IV Конференция Математических центров России

Тождество ошибки для некоторых задач с препятствием

К. А. Даровская

Первый МГМУ имени И.М. Сеченова,
Российский университет дружбы народов

Санкт-Петербург, 6–11 августа 2024

Задача

$$\frac{1}{2}(\mathcal{A}\Lambda v, \Lambda v)_Y - (f, v)_{L_2} \to \min_{\mathbb{K}}. \qquad (1)$$

- $\Lambda : V \to Y$ — линейный ограниченный дифференциальный оператор,
- $V = \left\{ v \in H^k(\Omega) + \text{краевые условия} \right\}$,
- $\Omega \in \mathbb{R}^n$ — ограниченная односвязная область, $\partial\Omega \in Lip$,
- Y — пространство $L_2(\Omega)$–функций (скалярных/векторных/матричных),
- $\mathcal{A}$ — гладкое обратимое линейное непрерывное самосопряженное отображение $Y \to Y$,
- $f \in L_2(\Omega)$,
- $\mathbb{K} \subset V$ — (непустое) выпуклое замкнутое подмножество,
- выполняются условия

$$\|\Lambda v\|_Y \geq \kappa \|v\|_V \quad (\forall v \in \mathbb{K}),$$

$$\kappa_1 \|\sigma\|_Y^2 \leq (\mathcal{A}\sigma, \sigma)_Y \leq \kappa_2 \|\sigma\|_Y^2 \quad (\forall \sigma \in Y).$$

Вопрос

$$\frac{1}{2}(\mathcal{A}\Lambda v, \Lambda v)_Y - (f, v)_{L_2} \to \min_{\mathbb{K}} . \qquad (1)$$

u — точное решение (1), существует и единственно;
v — (некоторое) приближенное решение

Насколько близко v к u?

Ответ: апостериорная оценка.

Первый шаг: тождество ошибки

$$M(v-u) + M^*(p^* - y^*) + \{\text{что-то еще}\} = \underbrace{m(\mathcal{A}\Lambda v - y^*)}_{\text{вычислимо}} .$$

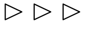
Здесь p^* и y^* — точное решение и приближенное решение задачи, двойственной к (1), соответственно (p^* существует и единственно).

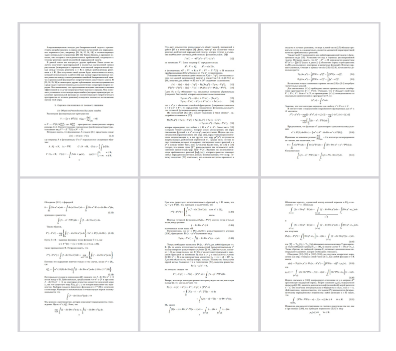
Классический подход

Основа: Теория двойственности.
Метод: Представить прямую и двойственную задачи в специальном виде, затем использовать составные функционалы.

Pro: Мощь метода.
Contra: Сложность вычисления составных функционалов.

Д. Е. Апушкинская, С. И. Репин. «Бигармоническая задача с препятствием: гарантированные и вычисляемые оценки ошибок для приближенных решений», Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **60**:11 (2020), 1881–1897.







Новый подход

Теория двойственности, без составных функционалов.[1]

Прямая задача

$$\frac{1}{2}(\mathcal{A}\Lambda v, \Lambda v)_Y - (f, v)_{L_2} \to \min_{\mathbb{K}} \qquad (1)$$

Оператор $\Lambda\colon V \to Y$, отображение $\mathcal{A}\colon Y \to Y$. $\qquad Y = L_2(\Omega) = Y^*$.

Двойственная задача

$$-\frac{1}{2}(\mathcal{A}^{-1}y^*, y^*)_{Y^*} - \sup_{v\in\mathbb{K}}\left\{-(y^*, \Lambda v)_{L_2} + (f, v)_{L_2}\right\} \to \max_{\widetilde{Y}^*} \qquad (2)$$

Оператор $\Lambda^*\colon Y^* \to V^*$, $< \Lambda^* y^*, v >= (y^*, \Lambda v)_{L_2}$ $(\forall v \in V, \forall y^* \in Y^*)$
отображение $\mathcal{A}^{-1}\colon Y^* \to Y^*$ с такими же свойствами, как у $\mathcal{A}$.
$\widetilde{Y}^* \subset Y^*$ т. ч. $\sup \neq +\infty$.

Связь (1) и (2): $p^* = \mathcal{A}\Lambda u$.

[1] Исследование выполнено при поддержке РНФ, проект 24–11–00073.

Эквивалентные скалярные произведения

и нормы[2]

Для Y $$(\alpha,\gamma)_{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}\alpha,\gamma) \quad \text{и} \quad \|\cdot\|_{\mathcal{A}}.$$

Для Y^* $$(\beta^*,\theta^*)_{\mathcal{A}^{-1}} = (\mathcal{A}^{-1}\beta^*,\theta^*) \quad \text{и} \quad \|\cdot\|_{\mathcal{A}^{-1}}.$$

Прямая задача

$$\frac{1}{2}\|\Lambda v\|^2_{\mathcal{A}} - (f,v) \to \min_{\mathbb{K}}$$

Двойственная задача

$$-\frac{1}{2}\|y^*\|^2_{\mathcal{A}^{-1}} - \sup_{v\in\mathbb{K}}\left\{-(y^*,\Lambda v)+(f,v)\right\} \to \max_{\widetilde{Y}^*}$$

[2] Если нижнего индекса нет, то L_2.



Результат

Теорема (Тождество ошибки)

Для любых функций $v \in \mathbb{K}$ *и* $y^* \in \widetilde{Y}^*$ *справедливо равенство*

$$\frac{1}{2}\|\Lambda(v-u)\|^2_{\mathcal{A}} + \frac{1}{2}\|p^* - y^*\|^2_{\mathcal{A}^{-1}} + \Big(\Lambda(v-u), p^* - y^*\Big) = \\ = \frac{1}{2}\|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|^2_{\mathcal{A}^{-1}}. \quad (3)$$

Замечание 1. В правой части можно использовать норму $\|\Lambda v - \mathcal{A}^{-1} y^*\|^2_{\mathcal{A}}$.
Замечание 2. Теорема справедлива $\forall v \in V$.

Предположение.
Тождество (3) является *естественным* для задач типа (1).



Часть 2. Бигармоническая задача

с тензором: $$\frac{1}{2}(\mathcal{A}\nabla\nabla v, \nabla\nabla v) - (f, v) \to \min_{\mathbb{K}}.$$

$$\frac{1}{2}\|\nabla\nabla(v-u)\|^2_{\mathcal{A}} + \frac{1}{2}\|p^* - y^*\|^2_{\mathcal{A}^{-1}} + \Big(\nabla\nabla(v-u), p^* - y^*\Big) = \\ = \frac{1}{2}\|\mathcal{A}\nabla\nabla v - y^*\|^2_{\mathcal{A}^{-1}}. \quad (4)$$

[3] Полностью изучена в **Д. Е. Апушкинская, С. И. Репин.** ЖВМ, **60**:11 (2020).

Часть 2. Бигармоническая задача

с тензором: $$\frac{1}{2}(\mathcal{A}\nabla\nabla v, \nabla\nabla v) - (f, v) \to \min_{\mathbb{K}}.$$

$$\frac{1}{2}\|\nabla\nabla(v-u)\|^2_{\mathcal{A}} + \frac{1}{2}\|p^* - y^*\|^2_{\mathcal{A}^{-1}} + \Big(\nabla\nabla(v-u), p^* - y^*\Big) = \\ = \frac{1}{2}\|\mathcal{A}\nabla\nabla v - y^*\|^2_{\mathcal{A}^{-1}}. \quad (4)$$

и без:[3] $$\frac{1}{2}(\nabla\nabla v, \nabla\nabla v) - (f, v) \to \min_{\mathbb{K}}.$$

$$\frac{1}{2}\|\nabla\nabla(v-u)\|^2 + \frac{1}{2}\|p^* - y^*\|^2 + \Big(\nabla\nabla(v-u), p^* - y^*\Big) = \\ = \frac{1}{2}\|\nabla\nabla v - y^*\|^2. \quad (5)$$

Главный герой: $\Big(\nabla\nabla(v-u), p^* - y^*\Big) = M_{\mathbb{K}}.$

[3] Полностью изучена в **Д. Е. Апушкинская, С. И. Репин.** ЖВМ, **60**:11 (2020).

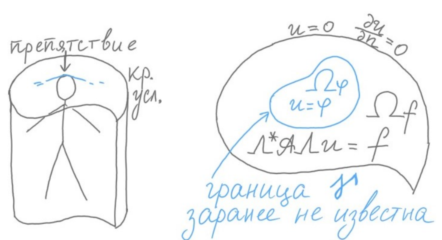
Препятствие

$$M_{\mathbb{K}} = (\nabla\nabla(v-u), p^* - y^*) = \int\limits_{\Omega} \Big(\nabla\nabla(v-u)\Big) : (p^* - y^*) dx.$$

(*Здесь* $q : g = \sum\limits_{i=1}^{d} \sum\limits_{j=1}^{d} q_{ij} g_{ij}$)

$V = \left\{ v \in H^2(\Omega) : v\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial \mathrm{n}}\big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$, $\mathbb{K} = \{ v \in V : \ v \geqslant \varphi$ п.в. в $\Omega \}$,

$\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$, $\varphi \leqslant 0$ на $\partial\Omega$, $\varphi(x) \leq k(\mathrm{dist}(x, \partial\Omega))^2$ в Ω. [4]



- Область Ω : разделяется на две подобласти Ω_f и Ω_φ с границей γ.
- В Ω_f : $\mathrm{div}\mathrm{Div}\,(\mathcal{A}\nabla\nabla u) = f$. В Ω_φ : $u = \varphi$.

[4] см. **К. О. Бесов.** ЖВМ, **63**:3 (2023).



Интегрирование

Априорная гладкость: $u \in H^3_{loc}(\Omega) \cap W^{2,\infty}_{loc}(\Omega)$ и $\Delta u \in W^{2,\infty}_{loc}(\Omega)$.

Будем предполагать, что $\mathrm{divDiv} y^* \in L_2(\Omega)$. Тогда

$$M_{\mathbb{K}} = \int\limits_\Omega \Big(\nabla\nabla(v-u)\Big) : (p^* - y^*)dx =$$

$$= -\int\limits_\Omega \nabla(v-u)\cdot \mathrm{Div} p^* dx - \int\limits_\Omega (v-u)\mathrm{divDiv} y^* dx. \quad (6)$$

(!) $\mathrm{divDiv} p^*$ является L_2–функцией в Ω_f и в Ω_φ, но $\mathrm{divDiv} p^* \notin L_2(\Omega)$.

Разобьем

$$\int\limits_\Omega \nabla(v-u)\cdot \mathrm{Div} p^* dx$$

на два интеграла по подобластям.



Интегрирование

$$\int\limits_{\Omega_\varphi} \nabla(v-u)\cdot \mathrm{Div}\, p^* dx = +\int\limits_{\partial\Omega_\varphi} (v-u)\big(\mathrm{Div}\, p^*\cdot e_{\Omega_\varphi}\big)dS - \int\limits_{\Omega_\varphi} (v-u)\mathrm{div}\mathrm{Div}\, p^* dx,$$

$$\int\limits_{\Omega_f} \nabla(v-u)\cdot \mathrm{Div}\, p^* dx = -\int\limits_{\partial\Omega_f} (v-u)\big(\mathrm{Div}\, p^*\cdot e_{\Omega_\varphi}\big)dS - \int\limits_{\Omega_f} (v-u)\mathrm{div}\mathrm{Div}\, p^* dx,$$

где e_{Ω_φ} — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega_\varphi$.

Поскольку $u=\varphi$ в Ω_φ и $\mathrm{div}\mathrm{Div}\, p^* = f$ в Ω_f, имеем

$$\int\limits_{\Omega_\varphi} \nabla(v-u)\cdot \mathrm{Div}\, p^* dx = +\int\limits_{\partial\Omega_\varphi} (v-u)\big(\mathrm{Div}\, p^*\cdot e_{\Omega_\varphi}\big)dS - \int\limits_{\Omega_\varphi} (v-\varphi)\mathrm{div}\mathrm{Div}\, p^* dx,$$

$$\int\limits_{\Omega_f} \nabla(v-u)\cdot \mathrm{Div}\, p^* dx = -\int\limits_{\partial\Omega_f} (v-u)\big(\mathrm{Div}\, p^*\cdot e_{\Omega_\varphi}\big)dS - \int\limits_{\Omega_f} (v-u) f dx.$$

Интегрирование

Обозначим скачок N при переходе через свободную границу $\partial\Omega_\varphi$ как

$$[N] = N(\Omega_\varphi)\big|_{\partial\Omega_\varphi} - N(\Omega_f)\big|_{\partial\Omega_\varphi}.$$

Возвращаясь к (6), имеем

$$M_{\mathbb{K}} = -\int\limits_{\partial\Omega_\varphi} (v-u)\left[\mathrm{Div}\, p^* \cdot e_{\Omega_\varphi}\right] dS +$$
$$+\int\limits_{\Omega_\varphi} (v-\varphi)\,(\mathrm{div}\mathrm{Div}\, p^* - \mathrm{div}\mathrm{Div}\, y^*)\, dx + \int\limits_{\Omega_f} (v-u)\,(f - \mathrm{div}\mathrm{Div}\, y^*)\, dx.$$

Отсюда после преобразований получаем (совпадает!)

$$M_{\mathbb{K}} = -\int\limits_{\partial\Omega_\varphi} (v-u)\left[\mathrm{Div}\, p^* \cdot e_{\Omega_\varphi}\right] dS + \int\limits_{\Omega_\varphi} (v-\varphi)\,(\mathrm{div}\mathrm{Div}\, p^* - f)\, dx +$$
$$+\int\limits_{\Omega_f} (u-\varphi)\,(\mathrm{div}\mathrm{Div}\, y^* - f)\, dx - \int\limits_{\Omega} (v-\varphi)\,(\mathrm{div}\mathrm{Div}\, y^* - f)\, dx. \quad (7)$$

И последнее

Мы предполагали, что $\mathrm{divDiv} y^* \in L_2(\Omega)$.
Достаточно ли этого для выполнения условия

$$\sup_{v \in \mathbb{K}} \left\{ -(y^*, \nabla\nabla v) + (f, v) \right\} \neq +\infty \ ?$$

И последнее

Мы предполагали, что $\mathrm{divDiv}\, y^* \in L_2(\Omega)$.
Достаточно ли этого для выполнения условия

$$\sup_{v \in \mathbb{K}} \left\{ -(y^*, \nabla\nabla v) + (f, v) \right\} \neq +\infty \ ?$$

Нет! Необходимое и достаточное условие (см. «статью 2020») — это

$$f - \mathrm{divDiv}\, y^* \leq 0. \qquad (8)$$

Теорема

Для любых функций $v \in \mathbb{K}$ и $y^* \in \widetilde{Y}^*$ справедливо равенство ...

$$\widetilde{Y}^* = \left\{ y^* \in M^{d \times d}_{sym}(L_2(\Omega)) : \mathrm{divDiv}\, y^* \in L_2(\Omega) \text{ и } f - \mathrm{divDiv}\, y^* \leq 0 \right\}.$$



Заключение

Чтобы использовать тождество ошибки

$$\frac{1}{2}\|\Lambda(v-u)\|^2_{\mathcal{A}} + \frac{1}{2}\|p^* - y^*\|^2_{\mathcal{A}^{-1}} + \Big(\Lambda(v-u), p^* - y^*\Big) = \frac{1}{2}\|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|^2_{\mathcal{A}^{-1}}.$$

для задачи вида

$$(\mathcal{A}\Lambda v, \Lambda v) - (f, v) \to \min_{\mathbb{K}},$$

нужно

- Исследовать $\sup\limits_{v\in\mathbb{K}}\Big\{-(y^*, \Lambda v) + (f, v)\Big\}$,
- Аккуратно интегрировать $\Big(\Lambda(v-u), p^* - y^*\Big)$ с учетом гладкости точных решений и условий из $\mathbb{K}$.

Последний слайд

Спасибо!